

リッチキリングスピノールと幾何構造

5123A007 今田夏暉

2025 年 2 月 1 日

目次

1	はじめに	2
2	スピン幾何学の基本事項	2
2.1	クリフォード代数とスピン群	3
2.2	スピノール表現	4
2.3	スピン構造	7
2.4	ディラック作用素	10
3	特別なスピノール場	11
3.1	平行スピノール	11
3.2	キリングスピノール	11
3.3	一般化キリングスピノール	17
4	リッチキリングスピノール	24
4.1	定義と基本的な性質	24
4.2	リッチキリングスピノールと多様体の既約性	26
4.3	佐々木多様体上のリッチキリングスピノール	29
5	考察	35
6	謝辞	35

1 はじめに

スピン多様体 M 上には幾つかの特別なスピノール場が定義され、そのうちの一つがキリングスピノールである。キリングスピノールを一般化した概念として一般化キリングスピノール (またはコーシースピノール) と呼ばれるものがある。一般化キリングスピノールは、任意のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_X \psi = A(X) \cdot \psi$$

を満たすスピノール ψ として定義される。ここで $A \in \Gamma(\text{End}(TM))$ は対称 $(1,1)$ -テンソル場である。 A が解析的または Codazzi テンソルであるなど、ある程度良い性質を持つ場合には、 M が 1 次元大きいリッチ平坦スピン多様体 Z に第二基本形式 $-2A$ を持つ部分多様体として埋め込まれ、 ψ は Z 上の平行スピノールの M への制限として得られる。このような理由から一般化キリングスピノールは部分多様体論とも関係が深い。

一方で、 A は対称という条件しかないため一般に解析が困難であり、一般化キリングスピノールの分類などはほとんど進んでいない。例えば球面 S^n 上ですらも、一般化キリングスピノールの分類は完了していない。

そこで本研究では、 A がリッチテンソルであるような一般化キリングスピノール (以降リッチキリングスピノール) について考察した。リッチキリングスピノールはキリングスピノールを含んでおり、キリングスピノールと一般化キリングスピノールの中間に位置する概念である。また、キリングスピノールを持つ多様体上ではリッチキリングスピノールはキリングスピノールと一致するという意味で、キリングスピノールの自然な一般化になっていると言える。

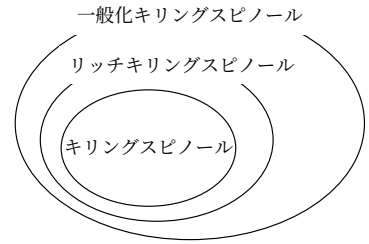


図 1: スピノールの包含関係

本論文は次のような構成である。 §2 ではスピン幾何学の基本事項について述べる。 §3 では 2 つの特殊なスピノールである平行スピノールとキリングスピノールについて述べ、最後に一般化キリングスピノールの基本的な性質について述べる。上記のように、平行スピノールは (一般化) キリングスピノールと深く関係する重要な概念である。 §4 ではリッチキリングスピノールの性質について調べ、キリングスピノールを持つ多様体と平行スピノールを持つ多様体の直積多様体上にリッチキリングスピノールが存在することを示す。さらに直積ではない多様体上にもリッチキリングスピノールが存在することを示す。

2 スピン幾何学の基本事項

スピン幾何学に登場する諸々の概念を定義すると同時に、本論文で用いる記法についての確認を行う。基本的には [1] の内容に沿っている。

2.1 クリフォード代数とスピノ群

定義 2.1.1. V を $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とし, $q: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を非退化対称双線形形式とする. $V^{\otimes} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$ を V のテンソル代数, $\mathcal{I}(V, q)$ を $\{v \otimes v + q(v, v) \mid v \in V\}$ から生成される $V^{\otimes}$ の両側イデアルとし, 商代数

$$\text{Cl}(V, q) = V^{\otimes} / \mathcal{I}(V, q)$$

を (V, q) から生成されるクリフォード代数という. q が文脈から明らかな場合は単に $\text{Cl}(V)$ と書く. また $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ で q が標準的な双線形内積の場合は $\text{Cl}_n, \mathbb{C}\ell_n$ と書く.

注意 2.1.2. $\text{Cl}(V, q)$ は外積代数 $\bigwedge^* V$ とベクトル空間として同型である. 実際, V の正規直交基底 $e_1, \dots, e_n$ をとり

$$\bigwedge^* V \rightarrow \text{Cl}(V, q), \quad e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mapsto e_{i_1} \dots e_{i_k}$$

とすれば良い. したがって $\text{Cl}(V, q)$ はベクトル空間としては 2^n 次元であり,

$$\{1\} \cup \{e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

が基底として取れる. 一方で, これは代数としての同型にはなっていない. 実際, $e_1 e_1 = -1$ などにより, クリフォード代数は通常の次数付き代数の構造を持たない. しかしながら $\mathbb{Z}_2$ 次数付き代数の構造を持つ. $\text{Cl}(V, q)$ の反自己準同型

$$\alpha: \text{Cl}(V) \rightarrow \text{Cl}(V), \quad e_{i_1} \dots e_{i_k} \mapsto e_{i_k} \dots e_{i_1}$$

は $\alpha^2 = 1$ を満たすので固有値 ± 1 を持つ. そこで α の固有値に関する $\text{Cl}(V, q)$ を固有空間分解

$$\text{Cl}(V) = \text{Cl}(V)^0 \oplus \text{Cl}(V)^1 \quad (\text{Cl}^0, \text{Cl}(V)^1 \text{ はそれぞれ固有値 } 1, -1 \text{ の固有空間})$$

を考えると

$$\text{Cl}(V)^i \cdot \text{Cl}(V)^j \subset \text{Cl}(V)^{i+j} \quad (i, j \in \mathbb{Z}_2)$$

を満たす.

注意 2.1.3. $\mathbb{C}\ell_n$ は Cl_n の複素化になっている. すなわち

$$\mathbb{C}\ell_n \cong \text{Cl}_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

である.

また低次の実クリフォード代数 Cl_n は代数としては次のように行列代数との同型がある.

表 1: 実クリフォード代数

Cl_1	Cl_2	Cl_3	Cl_4	Cl_5	Cl_6	Cl_7	Cl_8
$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$

そして次の定理が成り立つ.

命題 2.1.4. 実クリフォード代数は周期 8 で以下の周期性を持つ.

$$\mathcal{C}l_{n+8} \cong \mathcal{C}l_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}l_8 \cong \mathcal{C}l_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16)$$

ここで $\mathbb{K}(n)$ は $\mathbb{K}$ 係数の $n \times n$ 行列全体がなす $\mathbb{K}$ -代数を表す.

したがって実クリフォード代数 $\mathcal{C}l_n$ は, $n \not\equiv 3 \pmod{4}$ のときは行列代数, $n \equiv 3 \pmod{4}$ のときは 2 つの同じ行列代数の直和として表せる. 同様に複素クリフォード代数 $\mathbb{C}l_n$ は周期 2 で以下の同型がある.

$$\mathbb{C}l_{2k} \cong \mathbb{C}(2^k), \quad \mathbb{C}l_{2k+1} \cong \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k)$$

すなわち, 実クリフォード代数と複素クリフォード代数は共に行列代数 (またはその直和) と同型になる. この事実は次節でスピノール表現を構成する際に使う.

次にスピノール群を構成する. スピノール群 $\text{Spin}(n)$ とは特殊直交群 $\text{SO}(n)$ の 2 重被覆群である. $\text{SO}(n)$ の基本群は次のようになることが知られている.

$$\pi_1(\text{SO}(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (n \geq 3) \\ \mathbb{Z} & (n = 2) \end{cases}$$

したがって $\text{Spin}(n)$ は, $n \geq 2$ のときは $\text{SO}(n)$ の連結な被覆群, $n \geq 3$ のときは $\text{SO}(n)$ の普遍被覆群になる. これは被覆空間の一般論からわかることであるが, スピノール群をクリフォード代数の中で具体的に構成したい. そこで次のように定義する.

定義 2.1.5. 偶数個の単位ベクトルの積で表されるクリフォード代数の元全体は, $\mathcal{C}l_n$ の乗法群の部分群になり, これをスピノール群 $\text{Spin}(n)$ という.

$$\text{Spin}(n) = \{v_1 \cdots v_{2m} \in \mathcal{C}l_n \mid m \text{ は自然数, } v_i \in \mathbb{R}^n (1 \leq i \leq 2m), \|v_i\| = 1\}$$

注意 2.1.6. 注意 2.1.3 より自然な埋め込み $\mathcal{C}l_n \subset \mathbb{C}l_n$ があるので $\text{Spin}(n) \subset \mathbb{C}l_n$ とも思える. 例えば, 複素スピノール表現を構成する際にはこの埋め込みを用いる.

2 重被覆 $\xi_n: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ を定めたい. $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $r(v)$ で v に直交する超平面に関する鏡映を表す.

$$r: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{O}(n), \quad r(v)x = x - \frac{2\langle x, v \rangle}{\|v\|^2}v$$

$\det(r(v)) = -1$ なので, $r(v) \notin \text{O}(n)$ であるが $r(v_1) \circ r(v_2) \in \text{SO}(n)$ ($v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$) である. したがって r を $\text{Spin}(n)$ へ積を保つように拡張したものを ξ_n とすれば良い.

2.2 スピノール表現

スピノール群の表現について考える前に複素クリフォード代数 $\mathbb{C}l_n$ の表現について考える. 複素クリフォード代数 $\mathbb{C}l_n$ は $n = 2k$ のとき

$$\chi: \mathbb{C}l_{2k} \cong \mathbb{C}(2^k) \ni \varphi \mapsto \varphi \in \mathbb{C}(2^k) = \text{End}(\mathbb{C}^{2^k}),$$

$n = 2k + 1$ のとき

$$\chi^+ : \mathbb{C}l_{2k+1} \cong \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k) \ni (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_1 \in \mathbb{C}(2^k) = \text{End}(\mathbb{C}^{2^k})$$

$$\chi^- : \mathbb{C}l_{2k+1} \cong \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k) \ni (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_2 \in \mathbb{C}(2^k) = \text{End}(\mathbb{C}^{2^k})$$

という表現が考えられる．実は複素クリフォード代数の既約表現は同値なものを除いてこれが全てである． $\mathbb{C}l_{2k+1}$ は 2 つの非同値な既約表現を持つが，これは体積要素の作用で区別される．

$$\omega = \sqrt{-1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} e_1 \cdots e_n \in \mathbb{C}l_n$$

を $\mathbb{C}l_n$ の体積要素という．ここで $e_1, \dots, e_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底である．体積要素は

$$\omega^2 = 1$$

を満たし，

$$\chi^+(\omega) = +1, \quad \chi^-(\omega) = -1$$

となるので，体積要素の作用によって $\chi^\pm$ が区別できる．

クリフォード代数の既約表現を $\text{Spin}(n)$ に制限することで，スピノール表現と呼ばれるスピンの表現が得られる． n が奇数のときはクリフォード代数の既約表現は非同値なものが 2 種類存在していたが，これらはスピン群に制限することで同値な表現になる．

定義 2.2.1. $\chi, \chi^\pm$ を $\text{Spin}(n)$ に制限して得られるスピンの表現 ρ_n をスピノール表現という．またこのときの表現空間をスピノール空間といい $\Sigma_n = \mathbb{C}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ で表す．スピノール空間の元をスピノールという．

$$\rho_{2k} = \chi|_{\text{Spin}(2k)} : \text{Spin}(2k) \rightarrow \text{GL}(\Sigma_{2k})$$

$$\rho_{2k+1} = \chi^\pm|_{\text{Spin}(2k+1)} : \text{Spin}(2k+1) \rightarrow \text{GL}(\Sigma_{2k+1})$$

$\text{Spin}(n)$ は $\text{SO}(n)$ の二重被覆群であったから，二重被覆 ξ_n を通すことで $\text{SO}(n)$ の表現は $\text{Spin}(n)$ の表現に持ち上がる．しかしながら $\text{Spin}(n)$ の表現は必ずしも $\text{SO}(n)$ の表現に落ちるとは限らない．

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(n) & & \\ \xi_n \downarrow & \searrow \tilde{\rho} & \\ \text{SO}(n) & \xrightarrow{\rho} & \text{GL}(V) \end{array}$$

命題 2.2.2. スピノール表現 ρ_n は $\text{SO}(n)$ の表現からは得られない， $\text{Spin}(n)$ 独自の表現である．すなわち $\rho_n = \rho \circ \xi_n$ となる群準同型 $\rho : \text{SO}(n) \rightarrow \text{GL}(\Sigma_n)$ は存在しない．

証明. もしそのような ρ が存在するなら， $-1 \in \text{Spin}(n)$ の行き先を考えることで

$$-\text{Id} = \rho_n(-1) = \rho(\xi_n(-1)) = \rho(1) = \text{Id}$$

となり矛盾する．

□

注意 2.2.3. n が奇数のときはスピノール表現も既約表現であるが、 n が偶数のときは既約表現ではない。 $\mathbb{C}\ell_n$ も Σ_n に作用するから、この作用のもとで体積要素 ω は固有値 ± 1 を持ち、固有空間分解 $\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-$ できる。 $\Sigma_n^\pm$ はスピノール表現の部分表現であり、さらにこれらは既約である。すなわちスピノール表現は次の既約分解を持つ。

$$\rho_n = \rho_n^+ \oplus \rho_n^-, \quad \rho_n^\pm: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{GL}(\Sigma_n^\pm).$$

また、この2つの既約成分はベクトルによる積で入れ替わる。すなわち $v \in \mathbb{R}^n, \psi \in \Sigma_n^\pm$ に対して $v \cdot \psi \in \Sigma_n^\mp$ となる。

一方で $\text{Spin}(n) \subset \mathbb{C}\ell_n$ であったので、 $\text{Spin}(n)$ は次のように $\mathbb{C}\ell_n$ に自然に作用する。

$$\text{Ad}: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}\ell_n), \quad \text{Ad}(g)(\varphi) = g\varphi g^{-1}.$$

命題 2.2.4. 複素クリフォード代数 $\mathbb{C}\ell_n$ のスピノール空間への作用をクリフォード積といい $\varphi \cdot \psi$ ($\varphi \in \mathbb{C}\ell_n, \psi \in \Sigma_n$) で表す。クリフォード積は $\text{Spin}(n)$ 同変である。すなわち

$$g(\varphi \cdot \psi) = (\text{Ad}(g)(\varphi)) \cdot (g\psi)$$

が成り立つ。

証明.

$$(\text{Ad}(g)(\varphi))(g\psi) = (g\varphi g^{-1})(g\psi) = g(\varphi \cdot \psi)$$

である。 □

またスピノール空間にはクリフォード代数の作用に関して標準的なエルミート内積が入る。

命題 2.2.5. スピノール空間 Σ_n には

$$\langle v \cdot \varphi_1, v \cdot \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle, \quad (\text{for all } v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1, \varphi_1, \varphi_2 \in \Sigma_n)$$

を満たすエルミート内積が正の定数倍を除いて一意に存在する。以降、 Σ_n にはこの内積を入れる。定義からこの内積は $\text{Spin}(n)$ の作用で不変である。

証明. Γ_n を正規直交基底 $e_1, \dots, e_n$ から生成される $\mathbb{C}\ell_n$ の乗法部分群とする。 Γ_n は位数 2^{n+1} の有限群であることに注意する。 Σ_n の勝手なエルミート内積を $(\cdot, \cdot)$ とし Γ_n の作用で平均を取れば良い。すなわち

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\alpha \in \Gamma_n} (\alpha \cdot \varphi_1, \alpha \cdot \varphi_2)$$

とすれば、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は条件を満たすエルミート内積である。

次に一意性を示す。 $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ を同じ性質を満たすエルミート内積とする。 $\varphi_1 \in \Sigma_n$ を任意に固定する。

$\langle \varphi_1, \cdot \rangle': \Sigma_n \rightarrow \mathbb{C}$ は Σ_n 上の線形形式であるから

$$\langle \varphi_1, \cdot \rangle' = \langle \varphi_1', \cdot \rangle$$

となる $\varphi'_1 \in \Sigma_n$ が存在する．そこで $A: \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ を $A(\varphi_1) = \varphi'_1$ で定めると A は線型写像になり，

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle' = \langle A(\varphi_1), \varphi_2 \rangle \quad (\text{for all } \varphi_1, \varphi_2 \in \Sigma_n)$$

となる．いま任意の $\varphi_1, \varphi_2 \in \Sigma_n, v \in \mathbb{R}^n$ ($\|v\| = 1$) に対して，仮定から

$$\langle A(v \cdot \varphi_1), v \cdot \varphi_2 \rangle = \langle v \cdot \varphi_1, v \cdot \varphi_2 \rangle' = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle' = \langle A(\varphi_1), \varphi_2 \rangle = \langle v \cdot A(\varphi_1), v \cdot \varphi_2 \rangle$$

であるから $A(v \cdot \varphi_1) = v \cdot A(\varphi_1)$ が成り立つ． A は線型写像であるから結局， A は $\mathbb{C}\ell_n$ の作用と可換であることがわかる．したがって Schur の補題より A は恒等写像の定数倍である． $\square$

系 2.2.6. 任意の $v \in \mathbb{R}^n, \varphi_1, \varphi_2 \in \Sigma_n$ に対して次が成り立つ．

$$\langle v \cdot \varphi_1, \varphi_2 \rangle = -\langle \varphi_1, v \cdot \varphi_2 \rangle$$

証明. $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とする．命題 2.2.5 より

$$\begin{aligned} \langle v \cdot \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \|v\| \left\langle \frac{v}{\|v\|} \cdot \varphi_1, \varphi_2 \right\rangle \\ &= \|v\| \left\langle \frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} \cdot \varphi_1, \frac{v}{\|v\|} \cdot \varphi_2 \right\rangle \\ &= \|v\| \left\langle -\varphi_1, \frac{v}{\|v\|} \cdot \varphi_2 \right\rangle \\ &= -\langle \varphi_1, v \cdot \varphi_2 \rangle \end{aligned}$$

$\square$

2.3 スピン構造

まずリーマン多様体のスピン構造を定義する．

定義 2.3.1. (M, g) をむきづけられた n 次元リーマン多様体とし， $P_{\text{SO}(n)}M$ を M の正の向きの正規直交フレーム束とする． M 上のスピン構造とは主 $\text{Spin}(n)$ 束 $P_{\text{Spin}(n)}M \rightarrow M$ であって，ファイバーを保つ滑らかな写像 $\Phi: P_{\text{Spin}(n)}M \rightarrow P_{\text{SO}(n)}M$ が存在して

$$\Phi(ug) = \Phi(u)\xi_n(g), \quad (\text{for all } u \in P_{\text{Spin}(n)}M, g \in \text{Spin}(n))$$

が成り立つものである．ここで $\xi_n: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ は二重被覆である． M にスピン構造を 1 つ指定したものをスピン多様体という．

$$\begin{array}{ccc} P_{\text{Spin}(n)}M \times \text{Spin}(n) & \xrightarrow{\Phi \times \xi_n} & P_{\text{SO}(n)}M \times \text{SO}(n) \\ \downarrow \text{右作用} & & \downarrow \text{右作用} \\ P_{\text{Spin}(n)}M & \xrightarrow{\Phi} & P_{\text{SO}(n)}M \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

スピン多様体の各点にスピノール空間が対応するようなベクトル束を構成することができ、これをスピノール束という。

定義 2.3.2. (M, g) をスピン多様体, $P_{\text{Spin}(n)}M$ をスピン構造とする. スピノール表現 $\rho_n: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{GL}(\Sigma_n)$ によって得られる同伴ベクトル束

$$\Sigma M := P_{\text{Spin}(n)}M \times_{\rho_n} \Sigma_n$$

をスピノール束という. スピノール束の切断をスピノール場という.

n が偶数のとき, スピノール表現は既約ではなく, 2つの既約成分に分解 $\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-$ できるのであった (注意 2.2.3). これに対応してスピノール束も分解できる.

$$\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M, \quad \Sigma^\pm M = P_{\text{Spin}(n)}M \times_{\rho_n^\pm} \Sigma^\pm$$

スピノール空間 Σ_n にはクリフォード代数 $\mathbb{C}\ell_n$ も作用するのであった. クリフォード代数 $\mathbb{C}\ell_n$ にはベクトル $\mathbb{R}^n$ も含まれるから, 特にベクトルはスピノールに作用する. この関係は多様体上に持ち上がる.

まずファイバーが $T_x M$ から生成されるクリフォード代数であるようなベクトル束 $\mathbb{C}\ell(M)$ を構成する. スピン群 $\text{Spin}(n)$ の複素クリフォード代数 $\mathbb{C}\ell_n$ への作用 $\text{Ad}: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}\ell_n)$ による同伴ベクトル束を

$$\mathbb{C}\ell(M) = P_{\text{Spin}(n)}M \times_{\text{Ad}} \mathbb{C}\ell_n$$

とする. クリフォード束 $\mathbb{C}\ell(M)$ の切断 $\tilde{\varphi}$, スピノール束 ΣM の切断 $\tilde{\psi}$ は局所的に

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= [u, \varphi] \quad (u \in \Gamma(U, P_{\text{Spin}(n)}M), \varphi: U \rightarrow \mathbb{C}\ell_n) \\ \tilde{\psi} &= [u, \psi] \quad (u \in \Gamma(U, P_{\text{Spin}(n)}M), \psi: U \rightarrow \Sigma_n) \end{aligned}$$

と表せるから,

$$\tilde{\varphi} \cdot \tilde{\psi} = [u, \varphi \cdot \psi]$$

として束でのクリフォード積を定義する. これが well-defined であることは $\text{Spin}(n)$ 同変性 (命題 2.2.4) から従う. $TM \subset \mathbb{C}\ell(M)$ であるから, この意味でベクトル場はスピノール場に作用する.

スピノール束には M の Levi-Civita 接続から誘導される接続が入る. $\xi: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ は被覆写像であるから, 単位元での微分

$$\xi_*: \mathfrak{spin}(n) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(n)$$

はリー代数の同型であることに注意する.

定義 2.3.3. (M, g) をスピン多様体, $P_{\text{Spin}(n)}M$ をスピン構造, ΣM をスピノール束とする. (M, g) の Levi-Civita 接続を ∇ とすると, $P_{\text{SO}(n)}M$ 上に接続 ω が定義される. ω は $\mathfrak{so}(n)$ 値 1-form であるが, 同型 $\xi_*: \mathfrak{spin}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$ を通して $\mathfrak{spin}(n)$ 値 1-form と思うことができる. そこで $\Phi: P_{\text{Spin}(n)}M \rightarrow P_{\text{SO}(n)}M$ で引き戻すことで, $P_{\text{Spin}(n)}M$ の接続形式

$$\tilde{\omega} = (\xi_*)^{-1} \circ \Phi^* \omega \in \Omega(P_{\text{Spin}(n)}M) \otimes \mathfrak{spin}(n)$$

が得られる．そして $\tilde{\omega}$ から ΣM 上に接続が誘導される．この ΣM 上の接続も同じ ∇ で表し，スピンの接続という．

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 \tilde{\omega} & & P_{\text{Spin}(n)}M & \xrightarrow{\Phi} & P_{\text{SO}(n)}M & & \omega \\
 \downarrow \nabla & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \nabla \\
 & & \Sigma M & & TM & &
 \end{array}$$

スピンの接続と同様に， $\mathbb{C}\ell(M)$ にも接続が誘導されるが，これも ∇ で表す．スピンの接続は次の性質を持つ．

命題 2.3.4. スピンの接続について次が成り立つ．

- (i) クリフォード積に関してライプニッツ則が成り立つ．すなわち

$$\nabla_X(\varphi \cdot \psi) = (\nabla_X \varphi) \cdot \psi + \varphi \cdot (\nabla_X \psi)$$

が成り立つ．ここで $\varphi \in \Gamma(\mathbb{C}\ell(M))$, $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ である．特にベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ によるクリフォード積に関して

$$\nabla_X(Y \cdot \psi) = (\nabla_X Y) \cdot \psi + Y \cdot (\nabla_X \psi)$$

となるが，このときの $\nabla_X Y$ は Levi-Civita 接続によるものと一致する．

- (ii) n が偶数のとき，スピノール束は分解 $\Sigma = \Sigma^+ \oplus \Sigma^-$ されるのであった．スピンの接続はこの分解を保つ．すなわち $\psi \in \Gamma(\Sigma^\pm)$ に対して $\nabla_X \psi \in \Gamma(\Sigma^\pm)$ である．

証明.

- (i) クリフォード積が $\text{Spin}(n)$ 同変でスピノール束上に持ち上がっており，スピンの接続が $P_{\text{Spin}(n)}M$ 上の接続から誘導される ΣM 上の接続であることから従う．
(ii) $\Sigma^\pm$ がスピノール表現の既約分解から来ていることから従う．

□

M のリーマン曲率テンソルを R とすると， R の対称性から

$$\mathcal{R}: \bigwedge^2 TM \rightarrow \bigwedge^2 TM, \quad g(\mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

が定まる．スピンの接続は M の Levi-Civita 接続を引き戻して得られているので，スピンの接続の曲率とリーマン曲率には密接な関係がある．

命題 2.3.5. スピノール束の曲率 $R^{\Sigma M}$ と M の曲率は

$$R_{X,Y}^{\Sigma M} \Psi = \frac{1}{2} \mathcal{R}(X \wedge Y) \cdot \Psi$$

という関係にある。またこれより

$$\sum_{i=1}^n e_i \cdot R_{X, e_i}^{\Sigma M} \Psi = -\frac{1}{2} \text{Ric}(X) \cdot \Psi$$

が成り立つことがわかる。

証明. 単純な計算なので省略する。例えば [1, 2] を参照。 $\square$

2.4 ディラック作用素

スピノール場に作用する重要な微分作用素としてディラック作用素がある。

定義 2.4.1. M をスピン多様体とし、 $e_1, \dots, e_n$ を局所的な正規直交フレームとする。このときディラック作用素 $\mathcal{D}: \Gamma(\Sigma M) \rightarrow \Gamma(\Sigma M)$ を

$$\mathcal{D}\psi = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi$$

で定める。この定義は正規直交フレームの取り方に依らないので $\mathcal{D}$ は大域的に定義される。

M が偶数次元の場合、スピノール束は $\Sigma^\pm M$ と分解されたが、この分解に関してディラック作用素は次のように表示できる。

命題 2.4.2. (M, g) を偶数次元スピン多様体とする。このとき $\psi \in \Gamma(\Sigma^\pm M)$ に対して $\mathcal{D}\psi \in \Gamma(\Sigma^\mp M)$ となる。すなわちスピノール束の分解 $\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$ に関して

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^- \\ \mathcal{D}^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}^\pm: \Gamma(\Sigma^\pm) \rightarrow \Gamma(\Sigma^\mp)$$

と表すことができる。

証明. スピン接続がスピノール束の分解を保つこと (命題 2.3.4) と、ベクトルの積で既約成分が入れ替わること (注意 2.2.3) を思い出せば定義から明らかである。 $\square$

ディラック作用素はラプラシアンの平方根に相当する一階微分作用素である。 M が平坦な多様体であればディラック作用素の 2 乗はラプラシアンと一致するが、一般には M の曲率の分だけズレが生じる。このことを表すのが次の定理である。

定理 2.4.3 (Lichnerowicz 公式). n 次元スピン多様体 M 上のディラック作用素を $\mathcal{D}$ として、 $\Delta = \nabla^* \nabla$ を (接続) ラプラシアンとすれば

$$\mathcal{D}^2 = \Delta + \frac{1}{4} \text{Scal}$$

が成り立つ。ここで $\text{Scal}: M \rightarrow \mathbb{R}$ は M のスカラー曲率を表す。

証明. [1, 2]などを参照。 $\blacksquare$

3 特別なスピノール場

この章では、一般化キリングスピノールに関連する 2 つの特殊なスピノール場について述べ、最後に一般化キリングスピノールの基本的な性質についてまとめる。

3.1 平行スピノール

定義 3.1.1. 恒等的に 0 ではないスピノール $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ が

$$\nabla \psi = 0$$

を満たすとき、 ψ を平行スピノールという。

注意 3.1.2. 平行移動はファイバー間の線形同型になっているので、平行スピノールはある点で 0 であれば恒等的に 0 になってしまう。したがって平行スピノールは至る所で 0 でない。

平行スピノールはどんな多様体にも存在するわけではない。平行スピノールが存在するためには、その多様体のホロノミーが小さくならないといけない。

定理 3.1.3 (Wang). M を完備かつ単連結で既約な n 次元スピノ多様体で $n \geq 2$ とする。ここでの既約はリーマン多様体としての既約を意味している。このとき M が平行スピノールを持つための必要十分条件は、 M のホロノミー群 $\text{Hol}(M)$ が以下のものになっていることである。

表 2: 平行スピノールを持つ多様体のホロノミー群

n	7	8	$2m$	$4m$
$\text{Hol}(M)$	G_2	$\text{Spin}(7)$	$\text{SU}(2m)$	$\text{Sp}(4m)$

3.2 キリングスピノール

定義 3.2.1. 恒等的に 0 ではないスピノール $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ が、ある $\mu \in \mathbb{C}$ に対して

$$\nabla_X \psi = \mu X \cdot \psi \quad (\text{for all } X \in \mathfrak{X}(M))$$

を満たすとき、 ψ をキリングスピノールという。 μ をこのキリングスピノールのキリング数という。

次の命題はキリングスピノールの名の由来である。

命題 3.2.2. $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ をキリング数が実数のキリングスピノールとする。 $V_\psi \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$g(V_\psi, X) = \sqrt{-1} \langle X \cdot \psi, \psi \rangle$$

で定めると V_ψ はキリングベクトル場である。ここで、ベクトル場によるクリフォード積の反対称性と内積のエルミート性から $\langle X \cdot \psi, \psi \rangle \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ である。

証明. ψ がキリング数 $\mu \in \mathbb{R}$ のキリングスピノールであるとき、任意のベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X V_\psi, Y) &= Xg(V_\psi, Y) - g(V_\psi, \nabla_X Y) \\
&= \sqrt{-1} \langle \nabla_X Y \cdot \psi, \psi \rangle + \sqrt{-1} \langle Y \cdot \nabla_X \psi, \psi \rangle \\
&\quad + \sqrt{-1} \langle Y \cdot \psi, \nabla_X \psi \rangle - \sqrt{-1} \langle \nabla_X Y \cdot \psi, \psi \rangle \\
&= \sqrt{-1} \langle Y \cdot \nabla_X \psi, \psi \rangle + \sqrt{-1} \langle Y \cdot \psi, \nabla_X \psi \rangle \\
&= \mu \sqrt{-1} (\langle Y \cdot X \cdot \psi, \psi \rangle + \langle Y \cdot \psi, X \cdot \psi \rangle) \\
&= \mu \sqrt{-1} (\langle Y \cdot X \cdot \psi, \psi \rangle - \langle X \cdot Y \cdot \psi, \psi \rangle)
\end{aligned}$$

となる。したがって

$$g(\nabla_X V_\psi, Y) + g(\nabla_Y V_\psi, X) = 0$$

である。 □

キリングスピノールに関する基本的な性質は次の通りである。

命題 3.2.3. M を n 次元スピン多様体 ($n \geq 2$) とし、 $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ をキリング数 $\mu \in \mathbb{C}$ のキリングスピノールとする。このとき次が成り立つ。

- (i) M は Einstein 多様体である。特にそのスカラー曲率 scal は定数である。
- (ii) キリング数 μ とスカラー曲率 scal には次の関係が成り立つ。

$$\mu^2 = \frac{\text{scal}}{4n(n-1)}$$

したがって μ は実数か純虚数である。そこでキリング数が実数であるキリングスピノールを実キリングスピノールといい、キリング数が虚数であるキリングスピノールを虚キリングスピノールという。

証明. $\nabla_X \psi = \mu X \cdot \psi$ であるから

$$R_{X,Y}^{\Sigma M} \psi = \mu^2 (Y \cdot X - X \cdot Y) \cdot \psi$$

が成り立つ。よって命題 2.3.5 より

$$-\frac{1}{2} \text{Ric}(X) \cdot \psi = 2(1-n)\mu^2 X \cdot \psi$$

すなわち

$$(\text{Ric}(X) - 4(n-1)\mu^2 X) \cdot \psi = 0$$

とわかるので

$$\text{Ric}(X) - 4(n-1)\mu^2 X = 0$$

を得る．よって M は Einstein 多様体であり，スカラー曲率は

$$\text{scal} = \sum_{i=1}^n g(\text{Ric}(e_i), e_i) = 4n(n-1)\mu^2$$

である． □

また，キリングスピノールは多様体の既約性にも関係している．

命題 3.2.4. (M, g) を n 次元スピン多様体 ($n \geq 2$) とし，キリング数が 0 ではないキリングスピノールを持つとする．この時 M はリーマン多様体として既約である．すなわち局所的にリーマン多様体の積 $U = U_1 \times U_2$ に分解できない．ここで $U = U_1 \times U_2$ がリーマン多様体の積であるとは U_1, U_2 上の計量 g_1, g_2 が存在して $g = g_1 + g_2$ となることをいう．

証明. M が局所的にリーマン多様体として $U = U_1 \times U_2$ と分解できるとする．命題 3.2.3 の証明より，キリングスピノール ψ に対して

$$R_{X,Y}^{\Sigma M} \psi = \mu^2(Y \cdot X - X \cdot Y) \cdot \psi \quad (\text{for all } X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

が成り立つのであった．いま $X \in \mathfrak{X}(U_1), Y \in \mathfrak{X}(U_2)$ とすると， U 上で

$$R_{X,Y}^{\Sigma M} = 0, \quad (Y \cdot X - X \cdot Y) \cdot \psi = 2Y \cdot X \cdot \psi$$

より

$$0 = 2\mu^2 Y \cdot X \cdot \psi$$

を得る． $\mu \neq 0$ であることと，スピノールに対する接ベクトルの作用が可逆であることから，これは U 上で $\psi = 0$ であることを意味する．これはキリングスピノールが零点を持たないことに矛盾する． □

キリングスピノールはディラック作用素の固有値の下限を与えるスピノールとして現れる．

定理 3.2.5 (Th. Friedrich). M を n 次元コンパクトスピン多様体とする． M 上のディラック作用素 $\mathcal{D}$ の固有値 λ は次を満たす．

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \text{scal}_0.$$

ここで $\text{scal}_0 = \inf_{x \in M} \text{scal}(x)$ である．また等号が成り立つとき， M は Einstein 多様体であり， $\lambda_0^2 = \frac{n}{4(n-1)} \text{scal}_0$ に対応する固有スピノール ψ は

$$\nabla_X \psi + \frac{\lambda_0}{n} X \cdot \psi = 0$$

を満たす．

証明. まず不等式を示す．Cauchy-Schwarz の不等式により，任意のスピノール場 $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ に対して

$$|\mathcal{D}\psi|^2 \leq n|\nabla\psi|^2$$

が成り立つ．等号成立は

$$e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi = e_j \cdot \nabla_{e_j} \psi, \quad (\text{for all } x \in M, 1 \leq i, j \leq n, \{e_i\} \text{ は } T_x M \text{ の正規直交基底})$$

が成り立つときである．これと Lichnerowicz 公式より

$$\frac{1}{n} \int_M |\mathcal{D}\psi|^2 \, \text{dvol} \leq \int_M |\nabla \psi|^2 \, \text{dvol} = \int_M |\mathcal{D}\psi|^2 \, \text{dvol} - \frac{1}{4} \int_M \text{scal} |\psi|^2 \, \text{dvol}$$

となるから

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_M |\mathcal{D}\psi|^2 \, \text{dvol} \geq \frac{1}{4} \int_M \text{scal} |\psi|^2 \, \text{dvol}$$

である． ψ が固有値 λ の固有スピノールなら

$$\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_M |\psi|^2 \, \text{dvol} \geq \frac{1}{4} \int_M \text{scal} |\psi|^2 \, \text{dvol} \geq \frac{1}{4} \text{scal}_0 \int_M |\psi|^2 \, \text{dvol}$$

となるので

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \text{scal}_0$$

を得る．また等号成立のとき，Cauchy-Schwarz の不等式における等号成立条件から

$$\mathcal{D}\psi = n e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi \quad (\text{for each } 1 \leq i \leq n)$$

なので

$$\nabla_{e_i} \psi + \frac{1}{n} e_i \cdot \mathcal{D}\psi = 0 \quad (\text{for each } 1 \leq i \leq n)$$

が成り立つ．よって任意のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_X \psi + \frac{\lambda_0}{n} X \cdot \psi = 0$$

が成り立つ． □

キリングスピノールを持つ多様体は非常に限られる．Bär は，リーマン錐 $\overline{M}$ を考えることでキリングスピノールが平行スピノールに対応することを見出し，キリングスピノールの分類を行った．分類の結果は次の通りである．

定理 3.2.6 (Bär). (M, g) を完備かつ単連結な n 次元スピノ多様体とし， M 上に実キリングスピノールが存在するとする．このとき M は次のうちのどれかである．

n	$\text{Hol}(\overline{M})$	幾何構造
n	自明群	$M = S^n$
$4k - 1 \ (k \geq 3)$	$\text{SU}(2k)$	佐々木-Einstein
$4k - 1 \ (k \geq 3)$	$\text{Sp}(k)$	3-佐々木
$4k + 1 \ (k \geq 1)$	$\text{SU}(2k + 1)$	佐々木-Einstein
6	G_2	nearly Kähler
7	$\text{Spin}(7)$	nearly parallel G_2
7	$\text{SU}(4)$	佐々木-Einstein
7	$\text{Sp}(2)$	3-佐々木

この定理のため、リーマン錐に入るスピノール場について理解する必要がある。次の命題はリーマン錐に入るスピノール場と、スピノール場についての対応を示すものである。

命題 3.2.7. M を n 次元スピノール多様体とする。 $(\overline{M}, \bar{g})$ を M のリーマン錐

$$\overline{M} = M \times \mathbb{R}_+, \quad \bar{g} = r^2 g + dr^2$$

とし、 $\pi: \overline{M} \rightarrow M$ を自然な射影とする。このとき $\overline{M}$ には M から誘導されるスピノール場が入り、スピノール束の同型

$$\pi^*(\Sigma M) \cong \begin{cases} \Sigma \overline{M} & (\text{for } n \text{ even}) \\ \Sigma^\pm \overline{M} & (\text{for } n \text{ odd}) \end{cases}$$

がある。また、クリフォード積に関しては

$$\frac{1}{r} X \cdot \partial_r \cdot \pi^* \psi = \begin{cases} \pi^*(X \cdot \psi) & (\text{for } n \text{ even}) \\ \pm \pi^*(X \cdot \psi) & (\text{for } n \text{ odd}) \end{cases}$$

という関係が成り立ち、スピノール接続は任意の $X \in T\overline{M}$ に対して

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X(\pi^* \psi) &= \psi^* \left(\nabla_{\pi_* X} \psi - \frac{1}{2} (\pi_* X) \cdot \psi \right) \quad (\text{for } n \text{ even}) \\ \overline{\nabla}_X(\pi^* \psi)^\pm &= \psi^* \left(\nabla_{\pi_* X} \psi \mp \frac{1}{2} (\pi_* X) \cdot \psi \right) \quad (\text{for } n \text{ odd}) \end{aligned}$$

を満たす。

証明. n が偶数の場合のみ示す。奇数の場合もほとんど同様である。まずフレーム束 $P_{\text{SO}(n)} M$ を

$$P_{\text{SO}(n+1)} M = P_{\text{SO}(n)} M \times_\iota \text{SO}(n+1)$$

と拡張する。ここで $\iota: \text{SO}(n) \rightarrow \text{SO}(n+1)$ は包含写像である。このとき

$$\pi^*(P_{\text{SO}(n+1)} M) \xrightarrow{\sim} P_{\text{SO}(n+1)} \overline{M}, \quad ([u_x, A], (x, r)) \mapsto \left(\frac{1}{r} u_x, \partial_r \right) A$$

は $\overline{M}$ 上の主 $\mathrm{SO}(n+1)$ 束の同型を与える．次にスピノール構造も

$$P_{\mathrm{Spin}(n+1)}M = P_{\mathrm{Spin}(n)}M \times_{\iota} \mathrm{Spin}(n+1)$$

と拡張する．ここで $\iota: \mathrm{Spin}(n) \rightarrow \mathrm{Spin}(n+1)$ は包含写像である．そして $\overline{M}$ 上の主 $\mathrm{Spin}(n+1)$ 束

$$P_{\mathrm{Spin}(n+1)}\overline{M} = \pi^*(P_{\mathrm{Spin}(n)}M) = \{([\tilde{u}_x, g], (x, r)) \in P_{\mathrm{Spin}(n+1)} \times \overline{M} \mid (x, r) \in \overline{M}, g \in \mathrm{Spin}(n+1)\}$$

に対して

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\theta}: & P_{\mathrm{Spin}(n+1)}\overline{M} & \rightarrow & \pi^*(P_{\mathrm{SO}(n+1)}M) & \xrightarrow{\sim} & P_{\mathrm{SO}(n+1)}\overline{M} \\ & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ & ([\tilde{u}_x, g], (x, r)) & \mapsto & ([\theta(\tilde{u}_x), \xi_{n+1}(g)], (x, r)) & \mapsto & \left(\frac{1}{r}\theta(\tilde{u}_x), \partial_r\right) \xi_{n+1}(g) \end{array}$$

とすると、これは $\overline{M}$ 上のスピノール構造を与える．ここで $\theta: P_{\mathrm{Spin}(n)}M \rightarrow P_{\mathrm{SO}}M$ は M のスピノール構造である．

次にスピノール束の対応について考える．

$$\mathbb{C}\ell \cong \mathbb{C}\ell_{n+1}^0, \cong e_i \mapsto e_i e_{n+1}$$

は代数としての同型である．したがって $\mathbb{C}\ell_n$ の Σ_{n+1} への作用が、上の同型によって $\mathbb{C}\ell_n \subset \mathbb{C}\ell_{n+1}$ とみなすことで定まる．こうして定まる $\mathrm{Spin}(n)$ の Σ_{n+1} への表現は $\mathrm{Spin}(n)$ のスピノール表現と同値な表現である．したがってスピノール束の同型

$$\pi^*: \pi^*(\Sigma M) \rightarrow \Sigma \overline{M}, \quad ([\tilde{u}_x, \varphi], (x, r)) \mapsto [[[\tilde{u}_x, 1], (x, r)], \eta(\varphi)]$$

がある．ここで $\eta: \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n+1}$ は表現の同値を与える $\mathrm{Spin}(n)$ 同変な線形同型写像である．このとき任意の $\psi = [\tilde{u}_x, \varphi] \in \Sigma M$ と $X = [u_x, v] \in TM$ ($\theta(\tilde{u}_x) = u_x$) に対して

$$\begin{aligned} \pi^*(X \cdot \psi) &= \pi^*([\tilde{u}_x, v \cdot \varphi], (x, r)) \\ &= [[[\tilde{u}_x, 1], (x, r)], \eta(v \cdot \varphi)] \\ &= [[[\tilde{u}_x, 1], (x, r)], v \cdot e_{n+1} \cdot \eta(\varphi)] \\ &= X \cdot \frac{1}{r} \partial_r \cdot \pi^*(\psi) \end{aligned}$$

となる．

最後にスピノール接続の対応について考える． $\overline{M}$ の Levi-Civita 接続 $\overline{\nabla}$ は Koszul 公式より

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\partial_r} \partial_r &= 0 \\ \overline{\nabla}_{\partial_r} X &= \overline{\nabla}_X \partial_r = \frac{1}{r} X \\ \overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - rg(X, Y) \partial_r \end{aligned}$$

となることがわかる．そこでスピン接続 $\bar{\nabla}$ を局所的に $\bar{M}$ の正規直交フレーム $\frac{X_1}{r}, \dots, \frac{X_n}{r}, \partial_r$ で展開すれば (X_i は TM の正規直交フレーム)

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X(\pi^*\psi) &= [([\tilde{u}, 1], (x, r)), X\eta(\psi)] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i < j}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_X \frac{X_i}{r}, \frac{X_j}{r} \right) \frac{X_i}{r} \cdot \frac{X_j}{r} \cdot \pi^*\psi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \bar{g} \left(\bar{\nabla}_X \frac{X_i}{r}, \partial_r \right) \frac{X_i}{r} \cdot \partial_r \cdot \pi^*\psi \\
&= [([\tilde{u}, 1], (x, r)), \eta(X\psi)] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i < j}^n g(\nabla_X X_i, X_j) \frac{X_i}{r} \cdot \frac{X_j}{r} \cdot \pi^*\psi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g(X, X_i) \frac{X_i}{r} \cdot \partial_r \cdot \pi^*\psi \\
&= [([\tilde{u}, 1], (x, r)), \eta(X\psi)] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i < j}^n g(\nabla_X X_i, X_j) \pi^*(X_i \cdot X_j \cdot \psi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g(X, X_i) \pi^*(X_i \cdot \psi) \\
&= \pi^*(\nabla_X \psi) - \frac{1}{2} \pi^*(X \cdot \psi) \\
&= \pi^* \left(\nabla_X \psi - \frac{1}{2} X \cdot \psi \right)
\end{aligned}$$

となる． □

実キリングスピノールのキリング数はスケーリングによって自由に変えることができるので $\pm \frac{1}{2}$ としても良い．したがって命題 3.2.7 より次の定理を得る．

定理 3.2.8. (M, g) をスピン多様体, $(\bar{M}, \bar{g})$ をそのリーマン錐とする．このとき次の 2 つは同値である．

- (i) M 上に実キリングスピノールが存在する．
- (ii) $\bar{M}$ 上に平行スピノールが存在する．

3.3 一般化キリングスピノール

この節の内容は [3] に基づいている．

定義 3.3.1. 恒等的に 0 ではないスピノール $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ が, 対称 (1,1)-テンソル $A \in \Gamma(\text{End}(TM))$ に対して

$$\nabla_X \psi = A(X) \cdot \psi \quad (\text{for all } X \in \mathfrak{X}(M))$$

を満たすとき, ψ を一般化キリングスピノールという．ここで A が対称であるとは, 任意のベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $g(A(X), Y) = g(X, A(Y))$ を満たすことをいう．特に $A = \mu \text{Id}_{TM}$ ($\mu \in \mathbb{R}$) のとき, ψ は (実) キリングスピノールである．

補題 3.3.2. 一般化キリングスピノール ψ のノルムは一定である．そこで rescaling によって $\|\psi\| = 1$ として良い．特に一般化キリングスピノールはある点で 0 でなければ常に 0 でない．

証明. 任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$X\|\psi\|^2 = \langle \nabla_X \psi, \psi \rangle + \langle \psi, \nabla_X \psi \rangle = \langle A(X) \cdot \psi, \psi \rangle + \langle \psi, A(X) \cdot \psi \rangle = 0$$

である. ここで最後の等式は $A(X)$ の作用が反対称であること (系 2.2.6) による. よって $\|\psi\|$ は定数関数である. $\square$

命題 3.3.3. 一般化キリングスピノール ψ に対して次が成り立つ.

- (i) $\mathcal{D}\psi = -\text{tr}(A)\psi$
- (ii) $\mathcal{D}^2\psi = (\text{tr}(A))^2\psi - (d\text{tr}(A)) \cdot \psi$

証明.

- (i) ψ が一般化キリングスピノールであるから

$$\mathcal{D}\psi = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi = \sum_{i=1}^n e_i \cdot A(e_i) \cdot \psi = -\text{tr}(A)\psi$$

となる.

- (ii) (i) より

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2\psi &= -\mathcal{D}(\text{tr}(A)\psi) \\ &= -((d\text{tr}(A)) \cdot \psi + \text{tr}(A)\mathcal{D}\psi) \\ &= (\text{tr}(A))^2\psi - (d\text{tr}(A)) \cdot \psi \end{aligned}$$

となる.

$\square$

したがって Lichnerowicz formula より次を得る.

定理 3.3.4. $\delta(A) = -\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} A)(e_i)$ を A の発散とする. ψ を一般化キリングスピノールとすると

$$\frac{1}{4}\text{scal}\psi = (\text{tr}(A))^2 - d\text{tr}(A) - \delta(A) - \text{tr}(A^2)) \cdot \psi$$

が成り立つ.

証明. $e_1, \dots, e_n$ を局所直交フレームとする.

$$\nabla^* \nabla = -\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i})$$

であるから

$$\nabla^* \nabla \psi = -\sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \psi + \sum_{i=1}^n \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} \psi$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}(A(e_i) \cdot \psi) + \sum_{i=1}^n A(\nabla_{e_i} e_i) \cdot \psi \\
&= -\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} A)(e_i) \cdot \psi - \sum_{i=1}^n A(\nabla_{e_i} e_i) \cdot \psi - \sum_{i=1}^n A(e_i) \cdot \nabla_{e_i} \psi + \sum_{i=1}^n A(\nabla_{e_i} e_i) \cdot \psi \\
&= \delta(A) \cdot \psi - \sum_{i=1}^n A(e_i) \cdot A(e_i) \cdot \psi \\
&= \delta(A) \cdot \psi + \text{tr}(A^2) \psi
\end{aligned}$$

となる．したがって Lichnerowicz formula より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \text{scal} \psi &= \mathcal{D}^2 \psi - \nabla^* \nabla \psi \\
&= \text{tr}(A)^2 \psi - (d \text{tr}(A)) \cdot \psi - (\delta(A) \cdot \psi + \text{tr}(A^2) \psi) \\
&= (\text{tr}(A)^2 - d \text{tr}(A) - \delta(A) - \text{tr}(A^2)) \cdot \psi
\end{aligned}$$

を得る． □

また次が成り立つ．

命題 3.3.5.

$$\frac{1}{2} \mathcal{R}(X \wedge Y) \cdot \psi = ((\nabla_X A)(Y) - (\nabla_Y A)(X)) \cdot \psi - 2(A(X) \wedge A(Y)) \cdot \psi$$

証明. 式 (2.3.5) と torsion-free であることより

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \mathcal{R}(X \wedge Y) \cdot \psi &= R_{X,Y}^{\Sigma M} \psi \\
&= \nabla_X \nabla_Y \psi - \nabla_Y \nabla_X \psi - \nabla_{[X,Y]} \psi \\
&= \nabla_X (A(Y) \cdot \psi) - \nabla_Y (A(X) \cdot \psi) - A([X,Y]) \cdot \psi \\
&= (\nabla_X A)(Y) \cdot \psi + A(\nabla_X Y) \cdot \psi + A(Y) \cdot \nabla_X \psi \\
&\quad - (\nabla_Y A)(X) \cdot \psi - A(\nabla_Y X) \cdot \psi - A(X) \cdot \nabla_Y \psi - A([X,Y]) \cdot \psi \\
&= (\nabla_X A)(Y) \cdot \psi - (\nabla_Y A)(X) \cdot \psi + A(Y) \cdot A(X) \cdot \psi - A(X) \cdot A(Y) \cdot \psi \\
&= ((\nabla_X A)(Y) - (\nabla_Y A)(X)) \cdot \psi - 2(A(X) \wedge A(Y)) \cdot \psi
\end{aligned}$$

となる． □

注意 3.3.6. A の共変外微分を考えると

$$\begin{aligned}
(d^\nabla A)(X, Y) &= \nabla_X (A(Y)) - \nabla_Y (A(X)) - A([X, Y]) \\
&= (\nabla_X A)(Y) + A(\nabla_X Y) - (\nabla_Y A)(X) - A(\nabla_Y X) - A([X, Y]) \\
&= (\nabla_X A)(Y) - (\nabla_Y A)(X)
\end{aligned}$$

であるから命題 3.3.5 は

$$\frac{1}{2} \mathcal{R}(X \wedge Y) \cdot \psi = (d^\nabla A)(X, Y) \cdot \psi - 2(A(X) \wedge A(Y)) \cdot \psi$$

とかける．

補題 3.3.7. $A \in \Gamma(\text{End}(TM))$ を対称 (1,1)-テンソル場とする. このとき任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_X A \in \Gamma(\text{End}(TM))$ は対称 (1,1)-テンソル場である.

証明. 任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned} g((\nabla_X A)Y, Z) &= g(\nabla_X(A(Y)), Z) - g(A(\nabla_X Y), Z) \\ &= Xg(A(Y), Z) - g(A(Y), \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, A(Z)) \\ &= Xg(Y, A(Z)) - g(Y, A(\nabla_X Z)) - (Xg(Y, A(Z)) - g(Y, \nabla_X(A(Z)))) \\ &= -g(Y, A(\nabla_X Z)) + g(Y, \nabla_X(A(Z))) \\ &= g(Y, (\nabla_X A)(Z)) \end{aligned}$$

となる. □

補題 3.3.8. $A \in \Gamma(\text{End}(TM))$ を対称 (1,1)-テンソル場とし, $a = \text{tr}(A) \in C^\infty(M)$ とする. このとき任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$da(X) = \text{tr}(\nabla_X A)$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned} da(X) &= Xa \\ &= X \sum_{i=1}^n g(Ae_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g((\nabla_X A)(e_i), e_i) + g(A(\nabla_X e_i), e_i) + g(Ae_i, \nabla_X e_i) \\ &= \text{tr}(\nabla_X A) + 2 \sum_{i=1}^n g(Ae_i, \nabla_X e_i) \end{aligned}$$

である. ここで ∇ の $e_1, \dots, e_n$ に関する接続行列を ω とし, $Ae_i = \sum_{j=1}^n A_i^j e_j$ とすると

$$\sum_{i=1}^n g(Ae_i, \nabla_X e_i) = \sum_{i,j,k=1}^n g(A_i^j e_j, \omega_i^k(X) e_k) = \sum_{i,j,k=1}^n A_i^j \omega_i^k(X) \delta_{jk} = \sum_{i,j=1}^n A_i^j \omega_i^j(X) = 0$$

となる. 最後の等式は A が対称, ω が反対称であることを用いている. したがって主張を得る. □

そして命題 3.3.5 とこれらの補題より次を得る.

命題 3.3.9. ψ を一般化キリングスピノールとし, $a = \text{tr}(A) \in C^\infty(M)$ とおく. 次が成り立つ.

- (i) $\sum_{i=1}^n e_i \wedge (\nabla_{e_i} A)(X) \cdot \psi = (\frac{1}{2} \text{Ric}(X) + 2A^2(X) - 2aA(X)) \cdot \psi$
- (ii) $\delta A + da = 0$
- (iii) $a^2 - \text{tr}(A^2) = \frac{1}{4} \text{scal}$

ここで (ii) は $\delta A \in \Omega^1(M)$ もしくは $da \in \mathfrak{X}(M)$ とみなしている.

証明. 式 (2.3.5) より, 任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\text{Ric}(X) \cdot \psi &= \sum_{i=1}^n e_i \cdot R_{X, e_i}^{\Sigma M} \psi \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i \cdot \mathcal{R}(X \wedge e_i) \cdot \psi \\
&= \sum_{i=1}^n e_i \cdot ((\nabla_X A)(e_i) - (\nabla_{e_i} A)(X)) \cdot \psi - 2(A(X) \wedge A(e_i)) \cdot \psi \\
&= -\text{tr}(\nabla_X A)\psi - \sum_{i=1}^n e_i \cdot ((\nabla_{e_i} A)(X) + 2(A(e_i) \wedge A(X))) \cdot \psi \\
&= -\text{tr}(\nabla_X A)\psi - \sum_{i=1}^n e_i \cdot ((\nabla_{e_i} A)(X) + 2(A(e_i) \cdot A(X) + g(A(e_i), A(X)))) \cdot \psi \\
&= -\text{tr}(\nabla_X A)\psi - \sum_{i=1}^n e_i \cdot (\nabla_{e_i} A)(X) \cdot \psi - 2\text{tr}(A)A(X) \cdot \psi + 2A^2(X) \cdot \psi \\
&= -da(X)\psi - \sum_{i=1}^n e_i \wedge (\nabla_{e_i} A)(X) \cdot \psi + \sum_{i=1}^n g(e_i, (\nabla_{e_i} A)(X))\psi \\
&\quad - 2\text{tr}(A)A(X) \cdot \psi + 2A^2(X) \cdot \psi \\
&= -da(X)\psi - \sum_{i=1}^n e_i \wedge (\nabla_{e_i} A)(X) \cdot \psi + \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} A)(e_i), X)\psi \\
&\quad - 2\text{tr}(A)A(X) \cdot \psi + 2A^2(X) \cdot \psi \\
&= -da(X)\psi - \sum_{i=1}^n e_i \wedge (\nabla_{e_i} A)(X) \cdot \psi - g(\delta(A), X)\psi \\
&\quad - 2\text{tr}(A)A(X) \cdot \psi + 2A^2(X) \cdot \psi \\
&= -da(X)\psi - \sum_{i=1}^n e_i \wedge (\nabla_{e_i} A)(X) \cdot \psi - \delta(A)(X)\psi \\
&\quad - 2\text{tr}(A)A(X) \cdot \psi + 2A^2(X) \cdot \psi
\end{aligned}$$

が成り立つ. この等式の両辺に対して ψ と内積をとると, 1-form, 2-form の作用が反対称であることから

$$da(X) \langle \psi, \psi \rangle + \delta(A)(X) \langle \psi, \psi \rangle = 0$$

を得る. これは任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して成り立つから (ii) を得る. また再びこれを先の式に代入することで (i) を得る. 最後に (ii) を定理 3.3.4 に代入することで (iii) を得る. $\square$

M 上のキリングスピノールはリーマン錐 $\overline{M}$ 上の平行スピノールと対応していた (定理 3.2.8). これは $\overline{M}$ 上の平行スピノールを $\overline{M}$ 内の超曲面 M に制限することで M 上のキリングスピノール

が得られたとみることもできる．この考え方を一般化し，平行スピノールを持つ多様体 N 内の超曲面 M に平行スピノールを制限することで M 上の一般化キリングスピノールが得られる．

命題 3.3.10. $(\tilde{N}, g)$ を n 次元スピン多様体， $M \subset N$ を向きづけられた超曲面とし， $\iota: M \hookrightarrow N$ を包含写像とする． $V \in \Gamma(TN|_M)$ を M の法束を張る単位長さのベクトル場であって， M の正の向きの正規直交基底 $(X_1, \dots, X_{n-1})$ に対して $(X_1, \dots, X_{n-1}, V)$ が N の正の向きの正規直交基底になるようなものとする．このとき M には N から誘導されるスピン構造が入り，スピノール束の同型

$$\Sigma M \cong \begin{cases} \iota^*(\Sigma N) & (\text{for } n \text{ odd}) \\ \iota^*(\Sigma^+ N) & (\text{for } n \text{ even}) \end{cases}$$

がある．また，クリフォード積に関しては

$$X \cdot \iota^* \psi = \iota^*(X \cdot V \cdot \psi)$$

という関係が成り立ち，スピン接続は任意の $X \in TN$ に対して

$$\iota^*(\nabla_X^M \psi) = \nabla_X^N(\iota^* \psi) + \frac{1}{2} \Pi(X) \cdot (\iota^* \psi)$$

を満たす．ここで Π は $M \subset N$ の第二基本形式を表す．

証明. 単射

$$P_{\text{SO}(n-1)} M \rightarrow P_{\text{SO}(n)} N|_M, \quad (X_1, \dots, X_{n-1}) \mapsto (X_1, \dots, X_{n-1}, V)$$

による像を P とする． P は M 上の主 $\text{SO}(n-1)$ 束であり， $P \cong P_{\text{SO}(n-1)} M$ である．そして N のスピン構造

$$\theta: P_{\text{Spin}(n)} N \rightarrow P_{\text{SO}(n)} N$$

を用いて

$$P_{\text{Spin}(n-1)} M = \theta^{-1}(P)$$

とすると $P_{\text{Spin}(n-1)} M$ は M 上の主 $\text{Spin}(n-1)$ 束であり

$$\tilde{\theta} = \theta|_{P_{\text{Spin}(n-1)} M}: P_{\text{Spin}(n-1)} M \rightarrow P \xrightarrow{\sim} P_{\text{SO}(n-1)} M$$

は M のスピン構造を与える．スピノール束の同型とクリフォード積に関する等式は命題 3.2.7 の表現論的な考察と全く同じ議論から従う．

最後にスピン接続の対応について考える．命題 3.2.7 と同様に，正規直交フレーム $(X_1, \dots, X_{n-1}, V)$ で展開すれば， $\psi = [\tilde{u}, \varphi] \in \Gamma(\Sigma N)$ に対して

$$\begin{aligned} \iota^*(\nabla_X \psi) &= \iota^* \left([\tilde{u}, X\psi] + \frac{1}{2} \sum_{i < j}^{n-1} g(\nabla_X X_i, X_j) X_i \cdot X_j \cdot \psi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_X X_i, V) X_i \cdot V \cdot \psi \right) \\ &= [\tilde{u}, X\eta(\psi)] + \frac{1}{2} \sum_{i < j}^{n-1} (\iota^* g)(\nabla_X X_i, X_j) X_i \cdot X_j \cdot \iota^* \psi + \frac{1}{2} \iota^* \left(\sum_{i=1}^{n-1} g(-\nabla_X V, X_i) X_i \cdot V \cdot \psi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_X(\iota^*\psi) + \frac{1}{2}\iota^*\left(\sum_{i=1}^{n-1}\Pi(X, X_i)X_i \cdot V \cdot \psi\right) \\
&= \nabla_X(\iota^*\psi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\Pi(X, X_i)X_i \cdot \iota^*\psi \\
&= \nabla_X(\iota^*\psi) + \frac{1}{2}\Pi(X) \cdot \iota^*\psi
\end{aligned}$$

を得る. □

この命題から次の定理を得る.

定理 3.3.11. 命題 3.3.10 の状況において, ψ を N 上の平行スピノールとすると $\psi|_M = \iota^*\psi$ は

$$\nabla_X\psi|_M = -\frac{1}{2}\Pi(X) \cdot \psi|_M$$

を満たす. すなわち $\psi|_M$ は $A = -\frac{1}{2}\Pi$ とする一般化キリングスピノールである.

A, g が解析的な場合はこの逆も成り立つことが知られている.

定理 3.3.12 ([5, 定理 1.1]). (M, g) を解析的スピン多様体とし, スピノール場 $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ が解析的な対称 $(1, 1)$ -テンソル場 A に対して

$$\nabla_X\psi = A(X) \cdot \psi \quad (\text{for all } X \in \mathfrak{X}(M))$$

を満たす一般化キリングスピノールであるとする. このとき $M \times \mathbb{R}$ 内の十分小さい $M \times \{0\}$ の近傍 $\mathcal{Z}$ とその計量 $g^{\mathcal{Z}} = g_t + dt^2$ ($g_0 = g$) および $\mathcal{Z}$ 上の平行スピノール Ψ であって $\Psi|_M = \psi$ となるものが存在する.

定理 3.3.12 は, 解析的な状況の下では M 上に一般化キリングスピノールが存在すれば, M は 1 次元大きい Ricci-flat 多様体に超曲面として埋め込めてその第二基本形式が $\Pi = -2A$ となるという主張を含んでいる. 定理 3.3.12 の埋め込みに関する部分は次の小磯の定理 [6, 命題 6] から従っている. 小磯の定理 (および定理 3.3.12) において解析性が仮定されているのは証明に Cauchy-Kovalevski の定理と呼ばれる, 偏微分方程式の解の存在と一意性に関する定理を用いるためである. 定理 3.3.12 は C^∞ のクラスまで一般化すると反例が存在することも [5, §4.8] で示されている.

定理 3.3.13 ([6, 命題 6]). (M, g) を n 次元解析的リーマン多様体とし, $W \in \Gamma(\text{End}(TM))$ を M 上の解析的な対称 $(1,1)$ -テンソル場で

$$d \text{tr}(W) + \delta(W) = 0$$

$$\text{tr}(W^2) - (\text{tr } W)^2 = (n-1)\lambda - \text{scal}$$

を満たすものとする. ここで $\lambda \in \mathbb{R}$ は定数である. このとき Einstein 多様体 $(\mathcal{Z}, g^{\mathcal{Z}})$, $\text{Ric}^{\mathcal{Z}} = \lambda g^{\mathcal{Z}}$ が存在して M は $\mathcal{Z}$ に超曲面として埋め込まれ, その第二基本形式は $\Pi = W$ となる.

一般化キリングスピノール $\nabla_X \psi = A(X) \cdot \psi$ に対して $W = -2A$ とすると, この対称 (1,1)-テンソル場 $W \in \Gamma(\text{End}(TM))$ は定理 3.3.13 で $\lambda = 0$ とした場合の仮定を満たす (命題 3.3.9(ii)(iii)).

一方で解析的でない場合でも, A が Codazzi テンソルならば定理 3.3.11 の逆が成り立つことが知られている.

定理 3.3.14 ([7, 定理 8.1]). (M, g) をスピン多様体とし, M 上のスピノール場 ψ は

$$\nabla_X \psi = A(X) \cdot \psi \quad (\text{for all } X \in TM)$$

を満たす一般化キリングスピノールとする. さらにこのとき A が Codazzi テンソルである, すなわち任意のベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X)$$

を満たすとする. このとき 0 を含む開区間 $I \subset \mathbb{R}$ を用いて

$$\mathcal{Z} = M \times I, \quad g^{\mathcal{Z}} = g_t + dt^2, \quad g_t(X, Y) = g\left((\text{Id}_{TM} - 2tA)^2(X), Y\right)$$

とすると $(\mathcal{Z}, g^{\mathcal{Z}})$ 上に平行スピノール Ψ が存在して $\Psi|_M = \psi$ となる. ここで $M = M \times \{0\} \subset \mathcal{Z}$ である.

注意 3.3.15. 定理 3.3.14 の論文での元の主張は正定値とは限らない一般の擬リーマンスピン多様体に対してである.

4 リッチキリングスピノール

4.1 定義と基本的な性質

定義 4.1.1. 恒等的に 0 ではないスピノール $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ が, 定数 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$\nabla_X \psi = \lambda \text{Ric}(X) \cdot \psi \quad (\text{for all } X \in \mathfrak{X}(M))$$

を満たすとき, ψ をリッチキリングスピノールという. またこの λ を (リッチキリングスピノールに対する) キリング数と呼ぶ.

リッチテンソル Ric は対称 (1,1)-テンソルなので, リッチキリングスピノールは一般化キリングスピノールの $A = \lambda \text{Ric}$ の場合である.

注意 4.1.2. キリングスピノールを持つ多様体は Einstein 多様体なので $\text{Ric} = c \text{Id}_{TM}$ (for some $c \in \mathbb{R}$) を満たす. したがって ψ をキリング数 λ の実キリングスピノールとすると

$$\nabla_X \psi = \lambda X \cdot \psi = \frac{\lambda}{c} \text{Ric}(X) \cdot \psi$$

となるので ψ はリッチキリングスピノールである。ただしここで $c \neq 0$ としている。 $c = 0$ の場合は、命題 3.2.3 から ψ は平行スピノールである。よって

$$\nabla_X \psi = 0 = \text{Ric}(X) \cdot \psi$$

が成り立つ。以上よりリッチキリングスピノールはキリングスピノールの一般化になっていることがわかる。

注意 4.1.3. キリング数として 0 を除外しているのは、0 を含めても除外しても変わらないからである。証明で場合分けを減らすためであって本質的な問題ではない。実際 $\lambda = 0$ の場合は ψ は平行スピノールであり、このときは $\text{Ric} = 0$ なのであった。

命題 3.3.9 をリッチキリングスピノールに適用することで次を得る。

命題 4.1.4. ψ をキリング数 λ のリッチキリングスピノールとすると次が成り立つ。

- (i) $\lambda \sum_{i=1}^n e_i \wedge (\nabla_{e_i} \text{Ric})(X) \cdot \psi = (\frac{1}{2} \text{Ric}(X) + 2\lambda^2 \text{Ric}^2(X) - 2\lambda \text{scal Ric}(X)) \cdot \psi$
- (ii) $\delta \text{Ric} + d \text{scal} = 0$
- (iii) $\lambda^2 (\text{scal}^2 - |\text{Ric}|^2) = \frac{1}{4} \text{scal}$

証明. 命題 3.3.9 において $A = \lambda \text{Ric}$ とすれば良い。(iii) は

$$\text{tr}(\text{Ric}^2) = \sum_{i=1}^n g(\text{Ric}^2(e_i), e_i) = \sum g(\text{Ric}(e_i), \text{Ric}(e_i)) = |\text{Ric}|^2$$

であることを用いている。 □

系 4.1.5. M がリッチキリングスピノールを持つならば M のスカラー曲率は一定である。これより $\delta \text{Ric} = 0$ と $|\text{Ric}| = \text{一定}$ もわかる。

証明. 一般のリーマン多様体において、第二ビアンキ恒等式を縮約することで次の等式が成り立つ。

$$d \text{scal} = -2\delta \text{Ric}.$$

したがって 4.1.4(ii) より $d \text{scal} = 0$ であるから scal は定数である。残りの主張はこの結果と命題 4.1.4(ii)(iii) によりわかる。 □

リッチキリングスピノールはいつキリングスピノールになるのか、そのための判定条件を与えたい。そのために次の補題を用いる。

補題 4.1.6. n 次実対称行列 A に対して

$$n \text{tr}(A^2) \geq \text{tr}(A)^2$$

が成り立つ。等号成立のための必要十分条件は A がスカラー行列であることである。

証明. Cauchy-Schwarz の不等式からすぐにわかる。 □

定理 4.1.7. (M, g) を n 次元スピンド様体とし、キリング数 λ のリッチキリングスピノールを持つとする。このとき $\text{scal} = 0$ ならば M はリッチ平坦であり、 $\text{scal} \neq 0$ ならば

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)\text{scal}}$$

が成り立つ。等号成立のための必要十分条件は M が Einstein 多様体であること、すなわち ψ がキリングスピノールであることである。

証明. $\text{scal} = 0$ の場合は命題 4.1.4(iii) より $|\text{Ric}| = 0$ なので $\text{Ric} = 0$ である。そこで $\text{scal} \neq 0$ の場合を考える。補題 4.1.6 と命題 4.1.4(iii) より

$$\text{scal}^2 \leq n \text{tr}(\text{Ric}^2) = n \left(\text{scal}^2 - \frac{\text{scal}}{4\lambda^2} \right)$$

であるからこれを変形して

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)\text{scal}}$$

を得る。また等号成立は補題 4.1.6 の等号成立条件から

$$\text{Ric} = f \text{Id}_{TM} \quad (\text{for some } f \in C^\infty(M))$$

のときであるから

$$\text{scal} = \text{tr}(\text{Ric}) = nf$$

より f は定数で M は Einstein 多様体である。逆に M が Einstein 多様体ならば ψ はキリングスピノールなので命題 3.2.3(ii) より等号が成立することがわかる。□

リッチキリングスピノールを考えることが本当に一般化になっているか、つまりキリングスピノールではないリッチキリングスピノールが存在するかは非自明である。次の節でこの問題に対する答えを与える。

4.2 リッチキリングスピノールと多様体の既約性

キリングスピノールを持つ多様体はリーマン多様体として既約なのであった (命題 3.2.4)。一方でリッチキリングスピノールを持つ多様体は既約であるとは限らない。

命題 4.2.1. M をリッチキリングスピノールを持つ偶数次元スピンド様体とし、 N を平行スピノールを持つスピンド様体とする。このとき $M \times N$ 上にリッチキリングスピノールが存在する。

この命題の証明のために直積多様体上のスピンド構造について述べる。 M, N をそれぞれ m, n 次元スピンド様体とし

$$\theta^M: P_{\text{Spin}(m)}M \rightarrow P_{\text{SO}(m)}M$$

$$\theta^N: P_{\text{Spin}(n)}N \rightarrow P_{\text{SO}(n)}N$$

をそれぞれ M, N 上のスピンの構造とする.

$$\iota: \mathrm{SO}(m) \times \mathrm{SO}(n) \rightarrow \mathrm{SO}(m+n), \quad (A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

とし, $M \times N$ 上の主 $\mathrm{SO}(m+n)$ 束 P を

$$P = (P_{\mathrm{SO}(m)}M \times P_{\mathrm{SO}(n)}N) \times_{\iota} \mathrm{SO}(m+n)$$

で定めると

$$P \mapsto P_{\mathrm{SO}(m+n)}(M \times N), \quad [(u, v), C] \mapsto (u, v)C$$

によって P は $M \times N$ 上の正規直交フレーム束と同型である.

また, 同様に

$$\tilde{\iota}: \mathrm{Spin}(m) \times \mathrm{Spin}(n) \rightarrow \mathrm{Spin}(m+n), \quad (g, h) \mapsto gh$$

とし $M \times N$ 上の主 $\mathrm{Spin}(m+n)$ 束 $P_{\mathrm{Spin}(m+n)}(M \times N)$ を

$$P_{\mathrm{Spin}(m+n)}(M \times N) = (P_{\mathrm{Spin}(m)}M \times P_{\mathrm{Spin}(n)}N) \times_{\tilde{\iota}} \mathrm{Spin}(m+n)$$

で定めると,

$$\begin{array}{ccccc} \theta: & P_{\mathrm{Spin}(m+n)}(M \times N) & \rightarrow & P & \xrightarrow{\sim} & P_{\mathrm{SO}(m+n)}(M \times N) \\ & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ & [(\tilde{u}, \tilde{v}), g] & \mapsto & [(\theta^M(\tilde{u}), \theta^N(\tilde{v})), \xi_{n+1}(g)] & \mapsto & (\theta^M(\tilde{u}), \theta^N(\tilde{v}))\xi_{n+1}(g) \end{array}$$

が $M \times N$ 上のスピンの構造を与える.

次にクリフォード代数の表現について述べる. m を偶数, n を正の整数とし,

$$\chi: \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^n \rightarrow \mathrm{End}(\Sigma_m \otimes \Sigma_n), \quad (v, w) \mapsto \chi_m(v) \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n} + \chi_n(w) \otimes \chi_m(w)$$

とする. ここで n が奇数の場合は, Σ_n は $\Sigma_n^{\pm}$ のいずれかを表すこととする. χ は

$$\chi(v+w)^2 = -q(v+w, v+w) \mathrm{Id}$$

を満たすので, クリフォード代数の普遍性から

$$\chi: \mathbb{C}\ell_{m+n} \rightarrow \mathrm{End}(\Sigma_m \otimes \Sigma_n)$$

に拡張できる. n が偶数ならば $(\chi, \Sigma_m \otimes \Sigma_n)$ は $(\chi_{m+n}, \Sigma_{m+n})$ と同値な表現である. 一方で n が奇数ならば体積要素は $\omega_{m+n} = \omega_m \cdot \omega_n$ であることを用いて

$$\chi(\omega_{m+n}) = \pm 1$$

となることがわかるので, $(\chi, \Sigma_m \otimes \Sigma_n^{\pm})$ は $(\chi_{m+n}, \Sigma_{m+n}^{\pm})$ と同値な表現である. また χ を $\mathrm{Spin}(m+n)$ に制限することでスピノール表現 $\rho: \mathrm{Spin}(m+n) \rightarrow \mathrm{GL}(\Sigma_m \otimes \Sigma_n)$ が得られるが, χ の定義から $\mathrm{Spin}(m) \times \mathrm{Spin}(n)$ の表現 $\rho \circ \tilde{\iota}$ は外部テンソル積表現 $\rho_m \boxtimes \rho_n$ と同値な表現である.

以上より $M \times N$ 上のスピノール束 $\Sigma(M \times N)$ は $\Sigma M \otimes \Sigma N$ と同型であり、ベクトル場の作用は次で与えられる.

$$\begin{aligned} X \cdot (\psi_M \otimes \psi_N) &= (X \cdot \psi_M) \otimes \psi_N \quad (\text{for } X \in \mathfrak{X}(M)), \\ Y \cdot (\psi_M \otimes \psi_N) &= (\omega_M \cdot \psi_M) \otimes (Y \cdot \psi_N) \quad (\text{for } Y \in \mathfrak{X}(N)). \end{aligned}$$

またスピン接続は

$$\nabla_X(\psi_M \otimes \psi_N) = (\nabla_{\pi_M(X)}^M \psi_M) \otimes \psi_N + \psi_M \otimes (\nabla_{\pi_N(X)}^N \psi_N)$$

で与えられる. ここで $\pi_M(X), \pi_N(X)$ は $X \in T(M \times N)$ の TM, TN 成分への射影を表す.

命題 4.2.1 の証明. ψ_M を M 上のリッチキリングスピノール, ψ_N を N 上の平行スピノールとする. $M \times N$ 上のスピノール場 $\psi_M \otimes \psi_N$ がリッチキリングスピノールであることを示す. $X \in \mathfrak{X}(M \times N)$ に対して

$$\begin{aligned} \nabla_X(\psi_M \otimes \psi_N) &= (\nabla_{\pi_M(X)}^M \psi_M) \otimes \psi_N + \psi_M \otimes (\nabla_{\pi_N(X)}^N \psi_N) \\ &= (\lambda \text{Ric}^M(\pi_M(X)) \cdot \psi_M) \otimes \psi_N + 0 \\ &= \lambda \text{Ric}^M(\pi_M(X)) \cdot (\psi_M \otimes \psi_N) \\ &= \lambda \text{Ric}(X) \cdot (\psi_M \otimes \psi_N) \end{aligned}$$

となる. ここで N はリッチ平坦であるから $M \times N$ 上のリッチテンソルは

$$\text{Ric} = \begin{bmatrix} \text{Ric}^M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であることを用いている. □

注意 4.2.2. 命題 4.2.1 において, ψ_M を一般化キリングスピノールとしても同様の結果を得る.

実キリングスピノールはリッチキリングスピノールなので, 命題 4.2.1 をキリングスピノールに対して適用することで次の系を得る.

系 4.2.3. M, N をスピン多様体とし, ψ_M を M 上の実キリングスピノール, ψ_N を N 上の平行スピノールとする. このとき $\psi_M \otimes \psi_N$ はキリングスピノールではないリッチキリングスピノールである.

次の命題は, 逆にリッチ平坦ではない 2 つの多様体の積で表される空間にはリッチキリングスピノールが存在しないことを意味している.

命題 4.2.4. M をスピン多様体とし, リッチ平坦ではない 2 つの多様体の積に局所的に $U = U_1 \times U_2$ と分解できるとする ($U \subset M$ は開集合). このとき M 上にリッチキリングスピノールは存在しない.

証明. ψ を M 上のリッチキリングスピノールとする. 命題 3.3.5 より

$$R_{X,Y}^{\Sigma M} \psi = \lambda((\nabla_X \text{Ric})(Y) - (\nabla_Y \text{Ric})(X)) \cdot \psi - 2\lambda^2(\text{Ric}(X) \wedge \text{Ric}(Y)) \cdot \psi$$

である. $X \in \mathfrak{X}(U_1), Y \in \mathfrak{X}(U_2)$ とすると曲率テンソルに関して

$$R_{X,Y}^{\Sigma M} = 0, \quad (\nabla_X \text{Ric})(Y) = 0$$

であるから

$$0 = (\text{Ric}(X) \wedge \text{Ric}(Y)) \cdot \psi$$

を得る. さらに $g(\text{Ric}(X), \text{Ric}(Y)) = 0$ より

$$0 = (\text{Ric}(X) \wedge \text{Ric}(Y)) \cdot \psi = 2\text{Ric}(X) \cdot \text{Ric}(Y) \cdot \psi \quad (4.2.1)$$

となる. U_1, U_2 がリッチ平坦でないことから点 $(p, q) \in U_1 \times U_2$ と接ベクトル $X_p \in T_p U_1, Y_q \in T_q U_2$ が存在して $\text{Ric}(X_p) \neq 0, \text{Ric}(Y_q) \neq 0$ となる. 0 でない接ベクトルによるクリフォード積は可逆なので, 式 (4.2.1) より点 (p, q) において $\psi = 0$ であることがわかる. これはリッチキリングスピノールに零点が存在しないことに反する. $\square$

4.3 佐々木多様体上のリッチキリングスピノール

命題 4.2.4 は, 局所的にリッチ平坦な多様体との積の形に分解されるならば大域的に分解されなくてもリッチキリングスピノールが存在する可能性があることを示唆している. 次の定理はリッチキリングスピノールに関して直積多様体以外の例を与える.

定理 4.3.1. $3 \leq k \leq 21, k \neq 17$ とする. $S^2 \times S^3$ の k 重連結和には, リッチキリングスピノールが存在するような計量が存在する.

この定理を示すために諸々の概念を定義する.

定義 4.3.2. (M, g) をリーマン多様体とする. ベクトル場 $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, 1-形式 $\eta \in \Omega^1(M)$, (1,1)-テンソル場 $\varphi \in \Gamma(\text{End}(TM))$ が次の 4 条件を満たすとき, (φ, η, ξ, g) を M の佐々木構造という.

- (i) $\eta(\xi) = 1$
- (ii) $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$
- (iii) $g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$
- (iv) $(\nabla_X \varphi)(Y) = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$

佐々木構造を備えた多様体を佐々木多様体という. また,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi(Y)) \quad (\text{for all } X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

で定まる 2-形式 $\Phi \in \Omega^2(M)$ を基本 2-形式という.

佐々木多様体はケーラー多様体のリーマン錐として現れる多様体であり、したがって全ての佐々木多様体は奇数次元多様体である。佐々木多様体はケーラー多様体と似た性質を持っているためケーラー多様体の奇数次元版と解釈することができる。似た性質の1つとして、次のスピノール束の分解がある。

補題 4.3.3 ([8, 補題 6.2]). $(M^{2m+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ を佐々木多様体とし, $\Phi \in \Omega^2(M)$ をその基本 2-形式とする. このとき Φ のクリフォード積による作用で $\Sigma M = \Sigma_0 \oplus \cdots \oplus \Sigma_m$ と固有空間分解できて

$$\Phi \cdot |_{\Sigma_r} = i(m-2r) \text{Id}_{\Sigma_r}, \quad \text{rank}_{\mathbb{C}} \Sigma_r = \binom{m}{r} \quad (r = 0, 1, \dots, m)$$

$$\xi \cdot |_{\Sigma_0 \oplus \Sigma_2 \oplus \cdots} = -i \text{Id}, \quad \xi \cdot |_{\Sigma_1 \oplus \Sigma_3 \oplus \cdots} = i \text{Id}$$

となる^{*1}.

この補題を示すために幾つかの補題を用意する。まず局所的な正規直交フレームを

$$e_1, \bar{e}_1 = \varphi(e_1), \dots, e_m, \bar{e}_m = \varphi(e_m), \xi$$

の形にとる。便宜上 $e_{i+m} = \bar{e}_i$ と表記することもある。以降はこのフレームを用いて計算を行う。

補題 4.3.4. 任意のスピノール $\psi \in \Sigma M$ に対して、基本 2-形式 Φ は

$$\Phi \cdot \psi = - \sum_{i=1}^m e_i \cdot \bar{e}_i \cdot \psi$$

で作用する。

証明. Φ をフレームで表示すると

$$\Phi = \sum_{k < l} g(e_k, \varphi(e_l)) e_k \wedge e_l = \sum_i g(e_i, \varphi(\bar{e}_i)) e_i \wedge \bar{e}_i = - \sum_i e_i \wedge \bar{e}_i$$

であることから従う。 □

次に Witt 基底を考える。

$$z_j = \frac{1}{2}(e_j + i\bar{e}_j), \quad \bar{z}_j = \frac{1}{2}(e_j - i\bar{e}_j)$$

とすると $z_1, \dots, z_m, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m, \xi$ は $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の局所的なフレームであり, g を $TM \otimes \mathbb{C}$ に双線形に拡張すれば

$$g(z_i, z_j) = g(\bar{z}_i, \bar{z}_j) = 0$$

^{*1} [8, 補題 6.2] とは少しずれている。これは Σ_r の番号付けが逆転していることと、クリフォード代数の表現の取り方が異なることに由来している。佐々木多様体は奇数次元なのでクリフォード代数の表現は非同値な 2 つの既約表現が存在し、それらは体積要素の作用が ± 1 のどちらなのかによって判別できるのであった。[8] では体積要素の作用を -1 にしており、ここでは $+1$ にしている。

$$g(z_i, \bar{z}_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

$$g(z_i, \xi) = g(\bar{z}_i, \xi) = 0$$

となる. したがって $\mathbb{C}l(M)$ 内では

$$z_i \cdot z_j + z_j \cdot z_i = \bar{z}_i \cdot \bar{z}_j + \bar{z}_j \cdot \bar{z}_i = 0$$

$$z_i \cdot \bar{z}_j + \bar{z}_j \cdot z_i = -\delta_{ij}$$

$$z_i \cdot \xi + \xi \cdot z_i = \bar{z}_i \cdot \xi + \xi \cdot \bar{z}_i = 0$$

となる. 逆に $\mathbb{C}l(M)$ は $\{z_i, \bar{z}_i, \xi\}$ からこの関係式で生成される.

補題 4.3.5.

$$L_x = \{\psi \in \Sigma_x M \mid z_j \cdot \psi = 0 \ (j = 1, \dots, m)\}$$

は $\Sigma_x M$ の複素 1 次元の部分空間である.

証明. [1, 補題 6.5] と全く同じである. □

補題 4.3.6. $\psi \in L_x$ とすると

$$\xi \cdot \psi = -i\psi$$

である.

証明. まず

$$z_j \cdot (\xi \cdot \psi) = -\xi \cdot z_j \cdot \psi = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

であるから $\xi \cdot \psi \in L_x$ である. L_x は一次元ベクトル空間であるから, $a \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\xi \cdot \psi = a\psi$$

となる. 体積要素を ω とすると, 体積要素の作用は +1 であるから

$$\begin{aligned} \psi &= \omega \cdot \psi \\ &= i^{m+1} e_1 \cdot \bar{e}_1 \cdots e_m \cdot \bar{e}_m \cdot \xi \cdot \psi \\ &= i^{m+1} i^m (\bar{z}_1 + z_1) \cdot (\bar{z}_1 - z_1) \cdots (\bar{z}_m + z_m) \cdot (\bar{z}_m - z_m) \cdot \xi \cdot \psi \\ &= ai^{2m+1} (-2\bar{z}_1 \cdot z_1 - 1) \cdots (-2\bar{z}_m \cdot z_m - 1) \cdot \psi \\ &= ai^{2m+1} (-1)^m \psi \\ &= ai\psi \end{aligned}$$

となる. よって $a = -i$ である. □

補題 4.3.7. $\psi \in L_x \setminus \{0\}$ とする. このとき

$$\{\bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_r} \cdot \psi \mid 1 \leq r \leq m, 1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq m\}$$

は $\Sigma_x M$ の基底である.

証明.

$$\{\bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_p} \cdot z_{k_1} \cdots z_{k_q}\} \cup \{\bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_p} \cdot z_{k_1} \cdots z_{k_q} \cdot \xi\}$$

は $\mathbb{C}l(M)_x$ の基底である. (ただし添え字は共に $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m, 1 \leq k_1 < \cdots < k_q \leq m$ を渡る.) よってこれらを $\psi \in L_x$ に作用させることで $\Sigma_x M$ が生成される (表現の既約性). しかし $\xi \cdot \psi = -i\psi$ であるから, $\{\bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_p} \cdot z_{k_1} \cdots z_{k_q}\}$ だけ考えれば十分である. さらに L_x の定義から z_j を含む元は ψ に作用させると消えてしまうので, 結局 $\{\bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_p}\}$ だけ考えれば十分である. いま

$$\begin{aligned} \#\{\bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_p} \mid 1 \leq p \leq m, 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m\} &= 2^m \\ \dim_{\mathbb{C}} \Sigma_x M &= 2^m \end{aligned}$$

より

$$\{\bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_p} \cdot \psi \mid 1 \leq p \leq m, 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m\}$$

は $\Sigma_x M$ の基底である. □

補題 4.3.3 の証明. これまでの補題により

$$\Sigma_r M = \text{span}\{\bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_r} \cdot \psi \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq m\}$$

とすると $\text{rank} \Sigma_r M = \binom{m}{r}$ であり, $\Psi = \bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_r} \cdot \psi \in \Sigma_r M$ に対して

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \Psi &= - \sum_{k=1}^m e_k \cdot \bar{e}_k \cdot \Psi \\ &= - \sum_{k=1}^m (\bar{z}_k + z_k) \cdot (\bar{z}_k - z_k) \cdot \bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_r} \cdot \psi \\ &= -i \sum_{k=1}^m (\bar{z}_k + z_k) \cdot (\bar{z}_k - z_k) \cdot \bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_r} \cdot \psi \\ &= i \sum_{k=1}^m (2\bar{z}_k \cdot z_k + 1) \cdot \bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_r} \cdot \psi \\ &= im\Psi - 2ir\Psi \\ &= i(m - 2r)\Psi \end{aligned}$$

となる. また ξ の作用に関しては, ξ と $\bar{z}_j$ が反可換であることから明らか. □

佐々木多様体上には SqK スピノールと呼ばれる特殊なスピノール場が定義される.

定義 4.3.8. $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ がタイプ (a, b) の SqK スピノール (Sasakian quasi Killing spinor) であるとは

$$\nabla_X \psi = aX \cdot \psi + b\eta(X)\xi \cdot \psi$$

が成り立つことをいう. ここで $a, b \in \mathbb{R}$ である.

注意 4.3.9.

$$A = a \operatorname{Id}_{TM} + b\eta \otimes \xi$$

は対称 (1,1)-テンソル場である。したがって SqK スピノールは一般化キリングスピノールの一種である。

注意 4.3.10. [3] で構成された S^3 上の一般化キリングスピノールは

$$A = -\frac{3}{2} \operatorname{Id}_{TM} + 2\eta \otimes \xi$$

の SqK スピノールである。ここで ξ が佐々木構造を定めていることに注意する。

SqK スピノールに対して命題 3.3.9 を適用すると次を得る。

命題 4.3.11 ([8, 補題 6.4]). $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ が SqK スピノールならば次が成り立つ。

- (i) $\operatorname{Ric}(X) \cdot \psi = (8ma^2 + 4ab)X \cdot \psi + 2b\varphi(X) \cdot \xi \cdot \psi + (2m - 8ma^2 - 4ab)\eta(X)\xi \cdot \psi$
- (ii) $2b\Phi \cdot \psi = m(1 - 4a^2 - 4ab)\xi \cdot \psi$

特にスカラー曲率 scal と $|\operatorname{Ric}|^2$ は一定であり

$$\begin{aligned} \operatorname{scal} &= 8m(2m+1)a^2 + 16mab \\ |\operatorname{Ric}|^2 &= (8ma^2 + 4ab)(16m^2a^2 + 16ma^2 + 24mab - 4m) + 8mb^2 + 4m^2 \end{aligned}$$

となる。

そしてこの命題から次が成り立つ。

命題 4.3.12 ([8, 補題 6.5]). ψ をタイプ (a, b) の SqK スピノールとする。このとき次が成り立つ。

- (i) $a = \frac{1}{2}, b \neq 0$ ならば $m \equiv 0 \pmod{2}$ であり $\psi \in \Gamma(\Sigma_m)$ である。さらに $\operatorname{Ric} = (2m + 4b)g - 4b\eta \otimes \eta$ が成り立つ。
- (ii) $a = -\frac{1}{2}, b \neq 0$ ならば $m \equiv 0 \pmod{2}$ であり $\psi \in \Gamma(\Sigma_0)$ である。さらに $\operatorname{Ric} = (2m - 4b)g + 4b\eta \otimes \eta$ が成り立つ。
- (iii) $a = -\frac{1}{2}, b \neq 0$ ならば $m \equiv 1 \pmod{2}$ であり $\psi \in \Gamma(\Sigma_0) \cup \Gamma(\Sigma_m)$ である。さらに $\operatorname{Ric} = (2m - 4b)g + 4b\eta \otimes \eta$ が成り立つ。

証明. $a = \pm\frac{1}{2}$ のとき命題 4.3.11(ii) より $\Phi \cdot \psi = \mp m\xi \cdot \psi$ である。したがって ψ を $\Sigma_0 \oplus \cdots \oplus \Sigma_m$ の各成分に分解することで、補題 4.3.3 より $\Phi \cdot \psi = \pm im\psi$ であることがわかる。□

SqK スピノールの存在に関しては次の定理が知られている。

定理 4.3.13 ([8, 定理 6.3]). $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ を単連結な佐々木スピン多様体とする ($m \geq 2$)。このとき任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して以下が成り立つ。

- (i) $m \equiv 0 \pmod{2}$ のとき

- (a) タイプ $(\frac{1}{2}, b)$ の SqK スピノールが存在するための必要十分条件は $\text{Ric} = (2m + 4b)g - 4b\eta \otimes \eta$ であることである.
- (b) タイプ $(-\frac{1}{2}, b)$ の SqK スピノールが存在するための必要十分条件は $\text{Ric} = (2m - 4b)g + 4b\eta \otimes \eta$ であることである.
- (ii) $m \equiv 1 \pmod{2}$ のとき, タイプ $(-\frac{1}{2}, b)$ の SqK スピノールが存在するための必要十分条件は $\text{Ric} = (2m - 4b)g + 4b\eta \otimes \eta$ であることである.

証明の概要. 他も同様なので (i)(a) だけ示す. 命題 4.3.12 より Σ_m の部分だけ考えれば良い.

$$\bar{\nabla}_X \varphi = \nabla_X \varphi - \frac{1}{2} X \cdot \varphi - b\eta(X)\xi \cdot \varphi$$

によって新たな接続 $\bar{\nabla}$ を定める. すると $\varphi \in \Gamma(\Sigma_m)$ に対して $\bar{\nabla}_X \varphi \in \Gamma(\Sigma_m)$ となるので, $\bar{\nabla}$ は Σ_m 上の接続になる. この新たな接続 $\bar{\nabla}$ は Σ_m 上で平坦であることがわかるので, $\bar{\nabla}$ に関する平行スピノールが単連結領域上に存在する. この平行スピノールこそがタイプ $(\frac{1}{2}, b)$ の SqK スピノールである. $\square$

これを用いてリッチキリングスピノールの存在に関する次の定理が得られる.

定理 4.3.14. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ を単連結な佐々木スピン多様体とする ($m \geq 2$). M が

$$\text{Ric} = -2g + 2(1 + m)\eta \otimes \eta$$

を満たすならば M 上にリッチキリングスピノールが存在する. このとき M は Einstein 多様体ではないから, このリッチキリングスピノールはキリングスピノールではない.

証明. 定理 4.3.13 より, m の偶奇に依らずにタイプ $(-\frac{1}{2}, \frac{1+m}{2})$ の SqK スピノール ψ が存在する. このとき ψ は

$$\nabla_X \psi = -\frac{1}{2} X \cdot \psi + \frac{1+m}{2} \eta(X)\xi \cdot \psi = \frac{1}{4} \text{Ric}(X) \cdot \psi \quad (\text{for all } X \in \mathfrak{X}(M))$$

を満たすからリッチキリングスピノールである. $\square$

すると次に, 定理 4.3.14 の仮定を満たすような多様体が存在するのかという問題に移る.

定義 4.3.15. 佐々木多様体 $(M, \varphi, \eta, \xi, g)$ がある $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して

$$\text{Ric} = \lambda g + \mu \eta \otimes \eta$$

を満たすとき, M は佐々木 η -Einstein 多様体であるという.

佐々木 η -Einstein 多様体は positive, negative, null という 3 つのクラスに分けることができる [9, 定義 10]. 特に null は ξ の生成する葉層構造 $\mathcal{F}_\xi$ に関して, 基本第一チャーン類が $c_1(\mathcal{F}_\xi) = 0$ であることとして定義される. これは transverse structure がカラビヤウ (リッチ平坦) であることを意味している. そして null な佐々木 η -Einstein 多様体のリッチ曲率は次のように決まってしまう [9, 定理 19 の上].

補題 4.3.16. $(M^{2m+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ が null 佐々木 η -Einstein 多様体であるとする. このとき

$$\text{Ric} = -2g + 2(1+m)\eta \otimes \eta$$

が成り立つ.

したがって定理 4.3.14 は「5 次元以上の単連結な null 佐々木 η -Einstein 多様体でスピン構造を持つものにはリッチキリングスピノールが存在する」と言い換えることができる. このような多様体の存在に関しては次の定理が知られている.

命題 4.3.17 ([9, 系 42]). $S^2 \times S^3$ の k 重連結和 ($3 \leq k \leq 21, k \neq 17$) には positive と null 両方の佐々木 η -Einstein 構造が入る.

$S^2 \times S^3$ の k 重連結和 ($3 \leq k \leq 21, k \neq 17$) は単連結で, スピン構造も入るので定理 4.3.1 を得る.

5 考察

本研究では一般化キリングスピノールの特殊な場合としてリッチキリングスピノールについて調べた. 結果としてキリングスピノールの場合とは異なり, リッチキリングスピノールの存在は多様体の既約性を意味しないことがわかった. また, その分解 (ないしは葉層構造) がリッチキリングスピノールと大きく関連していることが予想される. そこでリッチキリングスピノールと葉層構造の関連について調べることが, 今後の課題として挙げられる.

また, リッチキリングスピノールに限らず, 一般化キリングスピノールのレベルでの葉層構造との関連についても調べなくてはならない. 特にリッチキリングスピノールから類推すると, 一般化キリングスピノールと transverse structure の関係については調べることが重要であると考えられる. このような観点で, (1,1)-対称テンソル場 A の固有値と固有ベクトルが重要な情報を持っていると考えられる. 実際, [4] でも球面上の一般化キリングスピノールの固有値 $\frac{1}{2}$ の固有ベクトルはキリングスピノールで佐々木構造や 3-佐々木構造を定めることが示されている. しかし, 一般の A の固有値や固有ベクトルに関する性質はまだほとんど調べられていない. 現時点では固有値は多様体上で一定であるのかすら解決しておらず, [3] でも Open Problem として挙げられている.

6 謝辞

修士論文の執筆にあたり, ご指導を賜りました指導教員の本間泰史教授に心より御礼申し上げます. 研究の方向性に迷った際にも親身にアドバイスをしていただき, 最後まで論文執筆を支えていただきました. また, 毎週のセミナーや院生室などで議論してくださった早稲田大学講師の大野走馬氏, 研究室同期の藤本瑠唯君, 吉岡哲弘君, 米田研究室の福井調君に深く感謝いたします. 最後に, 自主ゼミを通して支えてくれた Wathematica の皆さんにも感謝いたします. ありがとうございました.

参考文献

- [1] J.-P. Bourguignon, O. Hijazi, J.-L. Milhorat, A. Moroianu and S. Moroianu, 『A Spinorial Approach to Riemannian and conformal Geometry』, Monographs in Math, European Mathematical Society, 2015 年
- [2] 本間泰史, 『スピノ幾何学』, 森北出版, 2016 年
- [3] A. Moroianu, U. Semmelmann, Generalized Killing spinors on Einstein manifolds, *Int. J. Math.* 25 (4) (2014) 1–19.
- [4] A. Moroianu, U. Semmelmann, Generalized Killing spinors on spheres, *Ann. Glob. Anal. Geom.* 46 (2) (2014) 129–143.
- [5] B. Ammann, A. Moroianu, and S. Moroianu, The Cauchy problems for Einstein metrics and parallel spinors. *Comm. Math. Phys.* 320 (2013), 173–198.
- [6] N. Koiso, Hypersurfaces of Einstein manifolds. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 14 (1981), 433–443.
- [7] C. Bär, P. Gauduchon, A. Moroianu, Generalized Cylinders in Semi-Riemannian and Spin Geometry, *Math. Z.* 249 (2005), 545–580.
- [8] Friedrich, T., Kim, E.C.: The Einstein–Dirac equation on Riemannian spin manifolds. *J. Geom. Phys.* 33(1–2), 128–172 (2000)
- [9] Boyer, C.P., Galicki, K., Matzeu, P.: On eta-Einstein Sasakian geometry. *Commun. Math. Phys.* 262(1), 177–208 (2006)